Code sujet : 282

Conception : ESSEC – HEC Paris

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Mercredi 24 avril 2024, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Si A est un ensemble fini non vide, on note $\#A$ le nombre d'éléments de A. Si $A = \emptyset$, on convient que $\#A = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]$ le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est noté $A_{i,j}$.
- La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$. Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a. Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\|U\|$ sa norme euclidienne associée au produit scalaire canonique, c'est-à-dire
$$\|U\|^2 = {}^tUU.$$
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance, si elles existent.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on rappelle qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tQQ = I_n$).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

- Pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,k}$ désigne le symbole de Kronecker défini par : $\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$
- On note dans tout le problème $\|x\|$ la norme d'un vecteur x, la nature du vecteur entre les doubles barres suffisant à préciser de quelle norme il s'agit.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on adopte les deux définitions suivantes tout au long de l'énoncé :

- *On dit qu'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe une bijection σ de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.*
- *On dit qu'une matrice est de Hadamard si elle est carrée, si tous ses coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$ et si ses vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.*

L'énoncé comporte trois parties essentiellement indépendantes.

Le mot **FIN** marque la fin de l'énoncé.

Partie I : existence des matrices de Hadamard.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

On suppose dans toute cette partie I qu'il existe une matrice de Hadamard $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $c_1, \cdots, c_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ses vecteurs colonnes et $\ell_1, \cdots, \ell_n \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ ses vecteurs lignes.

1. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation. Montrer que P est orthogonale et que ${}^tP$ est aussi une matrice de permutation.
2. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence suivante
$$Q \text{ est une matrice de Hadamard } \Leftrightarrow {}^tQQ = nI_n \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \quad Q_{i,j}^2 = 1\,.$$
3. Montrer que ${}^tH$ est une matrice de Hadamard.
4. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale ne comportant que les valeurs -1 et 1 sur sa diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation. Montrer que PH, DH, HP et HD sont toutes des matrices de Hadamard.
5. En déduire qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont la première ligne est $(1, \cdots, 1)$.
6. En déduire que n est pair.
7. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Hadamard telle que $\forall j \in [\![1;n]\!], S_{1,j} = 1$. Montrer que
$$\forall (i,m) \in [\![2;n]\!]^2 \quad \text{tels que } i \neq m \quad \sum_{k=1}^{n} (S_{i,k}+1)(S_{m,k}+1) = n.$$
8. En déduire que soit $n = 2$ soit n est un multiple de 4.
9. Dans le cas où $n > 2$, montrer qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont les trois premières lignes sont de la forme
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right),$$
(on ne demande pas dans cette question de montrer que les quatre blocs verticaux comportent le même nombre de colonnes).
Indication : on peut observer que la permutation de certaines colonnes (ou la multiplication par -1 de certaines colonnes) dans une matrice de Hadamard donne encore une matrice de Hadamard, d'après la question 4 ci-dessus.

10. Montrer que les quatre blocs de la matrice de Hadamard de la question précédente comportent le même nombre de colonnes et en déduire à nouveau que n est nécessairement divisible par 4.
11. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on note $A \otimes B$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{kn}(\mathbb{R})$ définie bloc par bloc comme suit
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B & \cdots & A_{1,n}B \\ A_{2,1}B & \cdots & A_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1}B & \cdots & A_{n,n}B \end{pmatrix},$$
(ainsi, chacun des blocs $A_{i,j}B$ est de taille $k \times k$).
Montrer que si A et B sont des matrices de Hadamard, alors $A \otimes B$ l'est aussi.
12. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$.
13. La fonction `test_hadamard()` ci-dessous est écrite en PYTHON. Elle est incomplète et a comme paramètre d'entrée une matrice `M` de coefficients <u>entiers</u> représentée par un tableau bidimensionnel (de type `array`)
Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_hadamard()`
   - renvoie la valeur -2 si la matrice `M` n'est pas carrée,
   - renvoie la valeur -1 si la matrice `M` est carrée mais au moins l'un de ses coefficients n'appartient pas à $\{-1, 1\}$,
   - renvoie la valeur 0 si la matrice `M` est carrée et ses coefficients appartiennent tous à $\{-1, 1\}$ mais M n'est pas une matrice de Hadamard,
   - renvoie la valeur 1 si `M` est une matrice de Hadamard.

On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété.

```
import numpy as np
def test_hadamard(M):
  n, p = np.shape(M)
  if __________:
    return -2
  else:
    for i in range(0, ____):
      for j in range(0, _____):
        if __________________________ != 1 :
          return -1
    for j in range(0, ______):
      for k in range(______, n):
        if np.dot(__________________________) != 0:
            return 0
  return 1
```

14. On voudrait maintenant écrire en PYTHON une fonction `rand_hadam()` qui cherche une matrice de Hadamard dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1 (ainsi, chacune des autres lignes comporte autant de 1 que de -1) et de taille `4m×4m` où `m` est un entier donné en paramètre. Cette fonction a aussi un autre paramètre d'entrée `Nmax` désignant le nombre maximal de matrices à tester. On procède comme suit :
   (a) On construit aléatoirement une matrice ne contenant que des -1 et 1 comme coefficients de la manière suivante : pour chaque ligne (à partir de la deuxième ligne), on choisit successivement et aléatoirement les coefficients dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ jusqu'à ce que le nombre de la valeur 1 ou le nombre de la valeur -1 dans la ligne atteint $n/2 = 2m$. Si le nombre de coefficients égaux à 1 (respectivement -1) dans la ligne atteint $n/2$, on attribue à tous les coefficients restants de la ligne la valeur -1 (respectivement $+1$).

(b) En utilisant la fonction `test_hadamard()` on teste si la matrice ainsi construite est de Hadamard. Si oui, la fonction renvoie cette matrice. Sinon, on refait la construction d'une matrice de la même manière que dans (a) et cela autant de fois que nécessaire jusqu'à l'obtention d'une matrice de Hadamard, sans toutefois dépasser un nombre maximal de matrices testées désigné ici par `Nmax`. Si ce nombre maximal est atteint sans trouver une matrice de Hadamard, la fonction `rand_hadam()` renvoie la matrice nulle de taille `4m×4m`.

Compléter les parties soulignées en pointillé de la fonction `rand_hadam()` ci-dessous. *On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété (sans les commentaires).*

```
import numpy.random as rd
def rand_hadam(m, Nmax):
    n = 4*m
    for tst in range(0, Nmax):
       matpm = np.ones((n, n), dtype = int)
       for i in range(_______, n):
           nb_un = 0
           j = 0
           while  2*nb_un < n and  _________________< n :
             val = rd.randint(0,2)
             nb_un += ____________
             matpm[i, j] = 2*val - 1
             j = __________
           if (2*nb_un == n):
             for k in range(j, n):
               matpm[i, k] = _____________
       if (test_hadamard(matpm) == 1):
           return ______________
    return np.zeros((n, n), dtype = int)
```

Partie II : variables aléatoires deux à deux indépendantes sur un espace probabilisé fini.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé où Ω désigne un univers <u>fini</u>, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité. On pose $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ où l'entier n, $n \geqslant 2$, désigne ici et dans la suite de cette partie le nombre d'éléments de Ω. On suppose que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ pour tout $A \subset \Omega$ non vide et on pose

$$\forall i \in [\![1; n]\!] \qquad p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Toutes les variables aléatoires considérées dans la suite de cette partie II sont définies sur cet espace probabilisé. On suppose qu'il existe un entier naturel $\ell \geqslant 2$ et des variables aléatoires réelles $Z_1, \cdots, Z_\ell$ vérifiant les deux propriétés suivantes

— $\forall (i,j) \in [\![1; \ell]\!]^2$ avec $i \neq j$, Z_i et Z_j sont indépendantes
(autrement dit, $Z_1, \cdots, Z_\ell$ sont deux à deux indépendantes),

— $\forall i \in [\![1; \ell]\!]$, $\# Z_i(\Omega) \geqslant 2$.

Pour tout $i \in [\![1; \ell]\!]$, on pose $z_i = (Z_i(\omega_1), \cdots, Z_i(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$
Dans toute la suite, pour tous vecteurs $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\langle u;\ v \rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k u_k v_k.$$

On pose dans la suite $u_0 = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

15. Montrer que l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle x;\ y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16. Soit $i \in [\![1;\ell]\!]$. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathbb{E}(a_i Z_i + b_i) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(a_i Z_i + b_i) = 1.$$

Dans la suite de cette partie, on pose pour tout $i \in [\![1;\ell]\!]$: $X_i = a_i Z_i + b_i$ et $x_i = (X_i(\omega_1), \cdots, X_i(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$, où le couple (a_i, b_i) est celui de la question 16.

17. Soient V et W deux variables aléatoires réelles sur Ω.
On pose $v = (V(\omega_1), \cdots, V(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$, $w = (W(\omega_1), \cdots, W(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\mathbb{E}(V) = \langle v;\, u_0 \rangle \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(VW) = \langle v;\, w \rangle.$$

18. En déduire les relations pour tout $(i,j) \in [\![1;\ell]\!]^2$ tels que $i \neq j$

$$\langle x_i;\, u_0 \rangle = 0 \qquad , \qquad \langle x_i;\, x_i \rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle x_i;\, x_j \rangle = 0$$

19. En déduire que

$$3 \leqslant \ell + 1 \leqslant n.$$

20. Soit Z une variable aléatoire réelle d'espérance nulle. On pose $z = (Z(\omega_1), \cdots, Z(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$.
On suppose que $Z(\Omega) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ où $m = \#Z(\Omega) > 2$.
   (a) Montrer qu'il existe des m réels $\beta_1, \cdots, \beta_m$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\beta_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z = \alpha_k)\alpha_k\beta_k = 0$$

   (b) Montrer que l'application $T :\ Q \in \mathbb{R}_{m-1}[x] \mapsto (Q(\alpha_1), \cdots, Q(\alpha_m)) \in \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^m$.
   (c) En déduire qu'il existe un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $m-1$ tel que

$$\mathbb{E}(Q(Z)) = 0,\ \mathbb{E}(Q(Z)Z) = 0, \ \text{ et } Q(Z)(\Omega) \neq \{0\}.$$

21. On pose $r = \#\{i \in [\![1,\ell]\!] \mid \#X_i(\Omega) > 2\}$.
   (a) Montrer que

$$\ell + r \leqslant n - 1.$$

   (b) En déduire que

$$r \leqslant \frac{n-1}{2}.$$

22. On suppose de plus dans cette question que $\ell = n - 1$ (on rappelle que nécessairement $n \geqslant 3$). On considère la matrice carrée réelle M de taille $n \times n$ dont les coefficients sont définis par

$$\forall (i,j) \in [\![1;n-1]\!] \times [\![1;n]\!] \qquad M_{i,j} = X_i(\omega_j) \text{ et } M_{n,j} = 1,$$

On considère aussi la matrice *diagonale* $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $D_{i,i} = \sqrt{p_i}$.
   (a) Montrer que : $\forall i \in [\![1;n-1]\!] \quad \#X_i(\Omega) = 2$.
   (b) Soit $i \in [\![1;n-1]\!]$.
   Soient α_i et β_i deux réels tels que $X_i(\Omega) = \{\alpha_i, \beta_i\}$ et $\alpha_i > \beta_i$ et soit $\theta_i \in]0,1[$ tel que

$$\mathbb{P}(X_i = \alpha_i) = \theta_i \text{ et } \mathbb{P}(X_i = \beta_i) = 1 - \theta_i.$$

   Montrer les deux relations :

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}},\ \beta_i = -\frac{1}{\alpha_i}.$$

   (c) Montrer que la matrice MD est orthogonale.

(d) Soit Y la variable aléatoire définie par $\forall j \in [\![1;n]\!] \quad Y(\omega_j) = \dfrac{1}{p_j}$. Montrer que

$$Y = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k^2$$

(e) En déduire que pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$

$$\mathbb{E}(X_i^3) = \sum_{k=1}^{n} X_i(\omega_k).$$

(f) On reprend les notations de la question 22b et on pose

$$\forall i \in [\![1;n-1]\!] \qquad m_i = \#\{k \in [\![1,n]\!] \mid X_i(\omega_k) = \alpha_i\}.$$

Montrer que les trois affirmations suivantes sont nécessairement vraies :

(A1) pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$, $\alpha_i = \sqrt{\dfrac{n-m_i-1}{m_i-1}}$ et $\theta_i = \dfrac{m_i-1}{n-2}$.

(A2) $n \geqslant 4$,

(A3) $2 \leqslant m_i \leqslant n-2$,

(g) On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1;n]\!] \quad p_i = \dfrac{1}{n}$.
Montrer les deux assertions suivantes :

(a) n est nécessairement pair et $\theta_i = 1/2$.

(b) M est une matrice de Hadamard.

Partie III : deux propriétés des matrices de Hadamard

Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. On considère la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|. \end{array} \right.$$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{S}(A)$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \qquad \mathbb{S}(A)_{i,j} = \operatorname{sgn}(A_{i,j})$$

où sgn est la fonction signe définie par : $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$.
On considère le produit scalaire $\langle .;\ . \rangle$ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle A;\ B \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{i,j},$$

ainsi que la norme associée $||.||$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ ||A|| = \sqrt{\langle A;\ A \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2}.$$

On note φ l'application définie

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^{n^2} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (x_1, \cdots, x_{n^2}) & \mapsto & \left[\ x_{(i-1)n+j}\ \right]_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} \end{array} \right.$$

$\mathbb{R}^{n^2}$ est un espace euclidien muni du produit scalaire canonique.

23. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n^2},\ ||\varphi(x)|| = \|x\|.$$

24. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $||A||^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA)$.
25. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2\right)^{1/2} \leqslant F(A) \leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2\right)^{1/2}. \qquad (1)$$

26. On pose $\mathscr{K}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \varphi(x) \in \mathscr{O}_n\}$. Montrer que $\mathscr{K}_n$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n^2}$.
27. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, \forall y \in \mathbb{R}^{n^2},\ |F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leqslant n\|x-y\|.$$

28. En déduire que F admet un minimum global et un maximum global (atteints) sur $\mathscr{O}_n$.

Dans toute la suite, on note M_n^- (respectivement M_n^+) la valeur minimale (respectivement maximale) de F sur $\mathscr{O}_n$:

$$M_n^- = \min_{Q\in\mathscr{O}_n} F(Q), \qquad M_n^+ = \max_{Q\in\mathscr{O}_n} F(Q).$$

29. Montrer que $M_n^- = n$.
30. Trouver toutes les matrices $Q \in \mathscr{O}_n$ qui vérifient $F(Q) = n$.
31. Montrer que pour toute matrice $Q \in \mathscr{O}_n$ on a :

$$F(Q) = n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2}\|Q - \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{S}(Q)\|^2.$$

32. En déduire que $M_n^+ \leqslant n\sqrt{n}$.
Montrer que l'égalité est réalisée si et seulement s'il existe au moins une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
33. En déduire que si n n'est pas un multiple de 4 alors $M_n^+ < n\sqrt{n}$.
34. On suppose dans cette question que $n = 3$. Pour tous réels α et β on pose

$$U(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & -\beta \\ -\beta & \beta & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Trouver tous les couples (α, β) pour lesquels $U(\alpha,\beta) \in \mathscr{O}_3$ et en déduire un encadrement de M_3^+ (on note que $3\sqrt{3} \approx 5,196152$).
35. On suppose dans cette question que n est pair.
    (a) Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall i \in [\![1;n]\!]\quad |x_i| = |y_i| = 1$ et $\langle x;\ y\rangle \neq 0$. Montrer que $|\langle x;\ y\rangle| \geqslant 2$.
    (b) Soit x, y, u et v quatre vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$|\langle x;\ y\rangle - \langle u;\ v\rangle| \leqslant \sqrt{2\left(\|y\|^2\|x-u\|^2 + \|u\|^2\|y-v\|^2\right)}.$$

    (c) Soit $Q \in \mathscr{O}_n$ telle que $\mathbb{S}(Q)$ n'est pas de Hadamard. Montrer que

$$\|Q - \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{S}(Q)\|^2 \geqslant \frac{2}{n^2}.$$

    (d) En déduire que s'il n'existe aucune matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$M_n^+ \leqslant n\sqrt{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

FIN